5. Präsenzübung zur Quantentheorie II, SS 2007

(zu bearbeiten am Donnerstag, 10.05.2007)

Aufgabe P9 *Hamilton-Operator im Fock-Raum*

Ausgedrückt durch das Quantenfeld Ψ hat der Viel-Teilchen-Hamiltonoperator die Form

$$H \;=\; \int \mathrm{d}^3r\ \Psi^\dagger(\vec{r})\ h(\vec{r},\nabla)\ \Psi(\vec{r}) \quad , \qquad \text{wobei} \quad h(\vec{r},\nabla) \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})$$

der Ein-Teilchen-Hamiltonoperator ist. Laut Vorlesung gilt $\Psi(\vec{r}) = \sum_\mu u_\mu(\vec{r})\, a_\mu$. Stellen Sie H durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren dar. Bei welcher Wahl des Funktionensystems $u_\mu(\vec{r})$ ist H diagonal? Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe P10 *Bewegungsgleichung für Feldoperatoren*

Im Heisenberg-Bild sind die Quantenfelder $\Psi(\vec{r},t)$ zeitabhängig und erfüllen somit die Bewegungsgleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(\vec{r},t) \;=\; [\Psi(\vec{r},t)\,,H]\ .$$

Integrieren Sie dies formal, d.h. drücken Sie $\Psi(\vec{r},t)$ durch $\Psi(\vec{r}) \equiv \Psi(\vec{r},0)$ aus. Setzen Sie das Ergebnis in der rechten Seite dieser Gleichung ein und verwenden Sie H aus Aufgabe P9, um zu zeigen, daß $\Psi(\vec{r},t)$ sowohl für den Fermion- als auch für den Boson-Fall der Ein-Teilchen-Schrödingergleichung genügt.